

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2010**

CLASA a VII-a

1. Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care există $1 + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+5+y\sqrt{3}}$.

Propusă de prof. Ion Diaconu

2. Arătați că: a) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{1004 \cdot 1005}}{2009} < 502$

- c) Dacă $x \geq 4, y \geq 9$ și $z \geq 16$ arătați că $2\sqrt{x-4} + 3\sqrt{y-9} + 4\sqrt{z-16} \leq \frac{x+y+z}{2}$. În ce

caz are loc egalitatea.

Propusă de prof. Ion Ivan, Ioan Mihuț

3. În triunghiul ABC, $E, F \in (BC)$ astfel încât $BE=EF=FC$, CM mediana $M \in (AB)$, $CM \cap AF = \{N\}$, $BN \cap ME = \{P\}$. Arătați că $MP = 3 \cdot PE$.

Propusă de prof. Ion Diaconu

4. În interiorul sau pe laturile unui romb ABCD de latură a se consideră la întâmplare 3 puncte. Arătați că dacă $m(\angle A) < 60^\circ$ există printre cele 3 puncte cel puțin două astfel încât distanța dintre ele să fie cel mult a. Rămâne adevărată concluzia dacă $m(\angle A) > 120^\circ$?

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2010
CLASA a VII-a
BAREM

NU EXISTĂ PUNCT DIN OFICIU

1. Condiții de existență a radicalilor. **1p**

Prin ridicări succesive la pătrat obținem ecuația $(3y^2 - 4x - 4) + 4y\sqrt{3} = 0$ **4p**

$\Leftrightarrow y=0$ și $x=-1$. **2p**

2. a) Se demonstrează prin calcule. **1p**

b) Din a) se obține $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$. Se aplică relația pentru fiecare termen:

$$\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} \leq \frac{1}{2} \dots \frac{\sqrt{1004 \cdot 1005}}{1004+1005} \leq \frac{1}{2}.$$

Însumăm relațiile și obținem relația dată. **3p**

c) $2\sqrt{x-4} = \sqrt{4(x-4)} \leq \frac{4+x-4}{2} = \frac{x}{2} \dots$ și prin însumare se obține relația. Egalitatea are loc când $4=x-4$

$\Rightarrow x=8 \dots$ **3p**

3. În $\triangle BAF$, ME linie mijlocie $ME \parallel AF$. **1p**

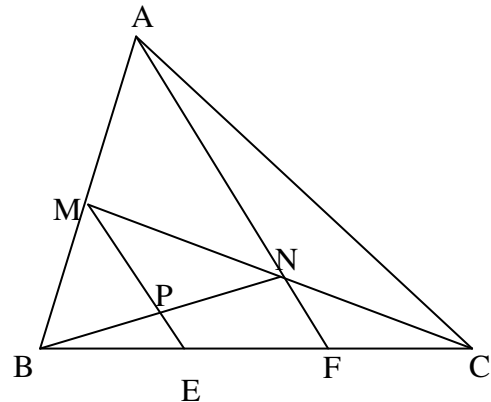
În $\triangle CME$, FN $\parallel ME$, $EF=FC \Rightarrow NF$ linie mijlocie și

$$NF = \frac{ME}{2}. \quad \mathbf{2p}$$

În $\triangle BNF$, FN $\parallel PE$, $EF=FC \Rightarrow PE$ linie mijlocie și

$$PE = \frac{NF}{2} = \frac{ME}{4}. \quad \mathbf{2p}$$

Deci $ME=4PE$. Se scade PE și se obține relația. **2p**



4. Diagonala BD împarte rombul în două triunghiuri isoscele congruente.

Oricum am alege cele 3 puncte, cel puțin 2 vor fi în interiorul sau pe laturile unuia dintre cele 2 triunghiuri (presupunem ABD). În triunghiul ABD, $BD < a$ (se opune unghiului cel mai mic din triunghi)

Cum distanța dintre oricare 2 puncte din interiorul unui triunghi sau de pe laturile sale este cel mult egală cu lungimea celei mai mari laturi rezultă că distanța dintre punctele aflate în interiorul sau pe laturile $\triangle ABD$ este cel mult egală cu a . **6p**

Dacă $m(\angle A) > 120^\circ$ atunci $m(\angle B) < 60^\circ$ și raționamentul este la fel. **1p**